

07-03 Le petit théorème de Fermat**Théorème**

Soit n un nombre entier.

Si p est un nombre premier ne divisant pas n , alors $n^{p-1} \equiv 1 [p]$.

Exemples

$n \setminus p$	2	3	5	7
1	$1^1 - 1 = 0$	$1^2 - 1 = 0$	$1^4 - 1 = 0$	$1^6 - 1 = 0$
2	$2^1 - 1 = 1$	$2^2 - 1 = 3$	$2^4 - 1 = 15$	$2^6 - 1 = 63$
3	$3^1 - 1 = 2$	$3^2 - 1 = 8$	$3^4 - 1 = 80$	$3^6 - 1 = 728$
4	$4^1 - 1 = 3$	$4^2 - 1 = 15$	$4^4 - 1 = 255$	$4^6 - 1 = 4095$

Remarque

Ce théorème est un test de primalité.

Si deux entiers n et p sont tels que $n^{p-1} - 1$ n'est pas un multiple de p alors p n'est pas premier.

Conséquence

Si p est un nombre premier et si n un nombre entier alors $n^p \equiv n [p]$.

Exemples

$n \setminus p$	2	3	5	7
1	$1^2 - 1 = 1$	$1^3 - 1 = 1$	$1^5 - 1 = 1$	$1^7 - 1 = 1$
2	$2^2 - 2 = 2$	$2^3 - 2 = 6$	$2^5 - 2 = 30$	$2^7 - 2 = 126$
3	$3^2 - 3 = 6$	$3^3 - 3 = 21$	$3^5 - 3 = 240$	$3^7 - 3 = 2184$
4	$4^2 - 4 = 12$	$4^3 - 4 = 60$	$4^5 - 4 = 1020$	$4^7 - 4 = 16380$

Démonstration

Soient p est un nombre premier et n un nombre entier.

- Si p ne divise pas n , alors $n^{p-1} \equiv 1 [p]$.
D'où $n^p \equiv n [p]$.
- Si p divise n , alors $n \equiv 0 [p]$ et $n^p \equiv 0 [p]$.
D'où $n^p \equiv n [p]$.

07-03 Applications du cours**Application 1**

Dans chaque cas, déterminer le reste de la division euclidienne de a par b .

a] $a = 3^{31}$; $b = 7$.

b] $a = 128^{130}$; $b = 17$.

c] $a = 55^{28}$; $b = 23$.

Application 2

Soit p un nombre premier.

Démontrer que, pour tout entier n , on a $3^{n+p} - 3^{n+1}$ divisible par p .

Application 3

Montrer que, quel que soit l'entier naturel n , $3^{6n} - 1$ est divisible par 7.

Application 4

Montrer que, quel que soit l'entier naturel n , $n^{11} - n$ est divisible par 33.

Application 5

Soit p un nombre premier.

Démontrer que, pour tout couple d'entiers relatifs a et b , on a $(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$.

Application 6

Examiner l'affirmation suivante :

« Si a , b et c sont trois nombres premiers strictement supérieurs à 3 alors $a^2 + b^2 + c^2$ n'est pas premier ».

Application 7

Soit l'ensemble E des nombres premiers p tels que $4p^2 + 1$ et $6p^2 + 1$ sont aussi des nombres premiers.

1. Montrer que E n'est pas vide.
2. Soit p un nombre premier strictement supérieur à 5.
 - a]** Démontrer que $(4p^2 + 1)(6p^2 + 1)$ et $(-p^4 + 1)$ ont le même reste par la division euclidienne par 5.
 - b]** En déduire les éléments de l'ensemble E .